المقصف الجامعي
التشغيل الذاتي
INDH

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
École nationale des sciences appliquées
Al Hoceima

Module: Analyse Réelle (AP12) — Année 2018/2019
CP 1ère année — Semestre : 1

Examen d'Analyse

Exercice 1 (6 points) **(Questions de cours)**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. (a) Soit $x_0 \in I$, montrer que pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.
   (b) Montrer que si f est injective alors f est srictement monotone sur I
   (c) Supposons que f est dérivable sur $I = [a, b]$.
   Montrer qu'il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
2. Peut-on affirmer ces assertion suivantes :
   (a) Si (u_n) est bornée alors (u_n) est de cauchy
   (b) Si f est continue sur I alors f est uniformément continue sur I.
   Justifier vos réponses.

Exercice 2 (6 points)

Soit I un intervalle fermé non vide et $f : I \longrightarrow I$ une fonction contractante sur I.
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$
2. Montrer que : pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$, $|u_p - u_q| \leqslant \dfrac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0|$
3. En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy
4. Montrer que f admet un unique point fixe l dans I

Exercice 3 (8 points)

On pose $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et strictement positive
2. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ $\quad \cancel{I_n I_n}$
4. Montrer que $\quad I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$ $\qquad I_n I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1} I_n$
5. Calculer I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$
6. Sachant que $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$ avec $K > 0$.
   Trouver la constante K